الباب الخامس

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

١- مقدمة :

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال إنها خطية فى المتغير y (المتغير التابع) إذا كان $y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}$ من الدرجة الاولى وتكون على الصورة العامة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1} y + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

حيث $a_o \neq 0$

فاذا كانت جميع المعاملات $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ قيم ثابتة، سميت المعادلة خطية ذات معاملات ثابتة ، اما اذا كانت واحدة على الاقل من المعاملات دالة فى x سميت المعادلة ذات معاملات متغيرة .

وتكون المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

خطية متجانسة ، حيث $f(x)=0$ فى المعادلة (1)

ملحوظة هامة :

إذا كانت $f(x) \neq 0$ فان المعادلة (1) تكون خطية غير متجانسة

تعريف : المؤثر التفاضلى D :

نعرّف $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ اى المشتقة الاولى بالنسبة الى x .

كذلك فان :

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}\ ,\quad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}$$

مثال

$$D\,e^{3x} = \frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$D^2\,e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2}e^{3x} = 9\,e^{3x}$$

بعض خواص المؤثر D :

1) $D[f_1(x) \pm f_2(x)] = Df_1(x) \pm Df_2(x)$

2) $D[kf(x)] = kDf(x)$

3) $F(D)\,e^{\alpha x} = F(\alpha)\,e^{\alpha x}$; F كثيرة حدود فى D

مما سبق يمكن كتابة المعادلة (1) باستخدام المؤثر D على الصورة

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1}D + a_n)\,y = f(x)$$

حيث نجد ان

$$\Phi(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n$$

دالة كثيرة حدود فى D من الدرجة n

وبذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة الرمزية :

$$\Phi(D)\,y = f(x)$$

وهى معادلة خطية غير متجانسة، أما المعادلة

$$\Phi(D)y = 0$$

فهى معادلة خطية متجانسة .

وسوف ندرس الآن بعض الخواص الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية .

٢- خواص حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

نفترض أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية على الصورة

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1)$$

نظرية :

إذا كان كل من y_1 , y_2 حل خاص للمعادلة (1) فان $y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ حل أيضا للمعادلة (1) ،حيث $c_1 ,\ c_2$ ثابتان .

البرهان : يترك للطالب

تعريف :

١) الحلان y_1 , y_2 للمعادلة (1) مستقلان خطياً اذا كان (ثابت) $\dfrac{y_2}{y_1} \neq c$

اى ان $y_2 \neq c\, y_1$

٢) الحلان y_1 , y_2 للمعادلة (1) مرتبطان خطياً اذا كان (ثابت) $\dfrac{y_2}{y_1} = c$

اى ان $y_2 = c\, y_1$

تعريف (الرونسكيان) : *Wronskian*

اذا كان $y_1(x), y_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فى نطاق تعريفهما ، فاننا نعرف الرونسكيان لهما كما ياتى :

$$W\{y_1(x),\ y_2(x)\}= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

تعريف :

١) الحـــلان $y_1,\ y_2$ للمعادلـــة *(1)* مرتبطـــان خطيـــاً إذا وفقـــط إذا كـــان $W\{y_1,\ y_2\}\equiv 0$.

٢) الحـــلان $y_1,\ y_2$ للمعادلـــة *(1)* مســـتقلان خطيـــاً إذا وفقـــط إذا كـــان $W\{y_1,\ y_2\} \neq 0$.

مـــثال :

ابحث إرتباط و استقلال كل مجموعة من الدوال الآتية :

1) e^x, e^{-x} 2) $1, x, x^2$ 3) $e^x, 2e^x, x$

الحـــل :

1) $$W\{e^x,\ e^{-x}\}= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\therefore$ الدالتان مستقلتان خطياً .

$$2)\quad W\{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

الدوال مستقلة خطياً

$$3)\quad W\{e^x, 2e^x, x\} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & x \\ e^x & 2e^x & 1 \\ e^x & 2e^x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

∴ الدوال مرتبطة خطياً .

تعريف : الحل العام :

إذا كان y_1 , y_2 حلين مستقلين للمعادلة (1) فان $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة (1) ، حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :

نفترض أن المعادلة

$$y'', a_1 y', a_2 y = 0 \qquad (1)$$

حيث $a_1,\ a_2$ ثابتان.

للحصول على الحل العام لتلك المعادلة ، نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطياً.

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة (1) حيث λ مقدار ثابت .

نضع المعادلة على الصورة $\left(D^2 + a_1 D + a_2\right) y = 0$

ثم نعوض بالحل المفروض

$Dy = De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \qquad , D^2 y = D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$

نحصل على المعادلة

$$\left(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2\right) e^{\lambda x} = 0$$

وحيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) *(Auxiliary characteristic)* ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران λ_1, λ_2

حيث
$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

١) حقيقيان مختلفان $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

٢) حقيقيان متساويان $\lambda_1 = \lambda_2$.

٣) مركبان .

سوف ندرس كل حالة على حده .

١) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أي ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad , y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حلان خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً ..... لماذا ؟

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحـــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 3D - 4)\, y = 0$

حيث $D = \dfrac{d}{dx}$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

اى ان $\lambda = -4 \quad , \quad \lambda = 1$

يكون الحل العام على صورة $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $2y'' - 3y' = 0$

نضع المعادلة على صورة $(2D^2 - 3D)\ y = 0$

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

فان المعادلة المساعدة هى $2\lambda^2 + 3\lambda = 0$

و تكون جذورها $\lambda = 0 \ , \ 3/2$

ويكون الحل العام صفر

اى ان $y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3/2 x}$

$$y = c_1 + c_2 e^{3/2 x}$$

---

٢) **جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان** :

اى أن $\lambda_1 = \lambda_2$ فى هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطا بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل أخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ يمثل حلا للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1 .

على ذلك ، يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

او

$$y = (c_1 + c_2 x)\ e^{\lambda x}$$

حيث $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحـــــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 - 4D + 4)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

∴ المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

ويكون جذراها $\lambda = 2,\ 2$

أى أن الحل العام $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$

---

٣) جذرا المعادلة المميزة مركبان :

اذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فان الجذر الآخر λ_2 يكون على صورة $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ويكون الحل العام

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad (1)$$

حيث $A_1,\ A_2$ ثابتان اختياريان .

ويمكن اثبات ان الحل العام يكون على صورة

$$y = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

ولإثبات ذلك :

نضع الحل (1) على صورة

$$y = A_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left[A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}\right]$$

ونعلم ان $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \ , \ e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$

وعلى ذلك فان

$$y = e^{\alpha x}[A_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + A_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)]$$

$$= e^{\alpha x}[(A_1 + A_2)\cos\beta x + i(A_1 - A_2)\sin\beta x]$$

ونعتبر $A_1 + A_2 = C_1 \ , \quad i(A_1 - A_2) = C_2$

فيكون الحل هو : $y = e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x]$

<u>مثـــال :</u>

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

<u>الحـــل :</u>

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 2D + 4)\,y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$$\therefore \ \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة

$$y = e^{-x}[c_1\cos 2x + c_2\sin 2x]$$

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 9y = 0$

الحـــل :

نضع المعادلة على صورة $(D^2 + 9) = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$\therefore$ فان المعادلة المساعدة هى $\lambda^2 + 9 = 0$

ويكون جذراها $\therefore\ \lambda = \neq 3i$

$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

٢- حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة

يمكن تعميم الحالات السابقة الخاصة بحل معادلات الرتبة الثانية على المعادلات من الرتبة n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

فتكون المعادلة المساعدة

$$a_0 \lambda^n + a1 \lambda^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

التى نحصل منها على الجذور $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n$

ونحصل على الحلول المختلفة حسب العلاقة بين تلك الجذور .

١) اذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq .... \neq \lambda_n$ (أعداداً حقيقية)

فان الحل العام

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}$$

٢) اذا كانــت جميــع الجــذور حقيقيــة واحــد الجــذور مكــرر K مــن المــرات $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 .... = \lambda_k, \qquad \lambda_{k+1} \neq ...... \neq \lambda_n$ فــان الحــل العــام يكــون

$$y = \left[c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_k x^{k-1}\right] e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + ... + c_n x^{\lambda_n x}$$

٣) اذا كانت الجذور $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + i\beta$

فانه يوجد $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \alpha - i\beta$

ويكون الحل العام المناظر لتلك الجذور

$$y = e^{\alpha x}\left[\left(\left|c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) \cos \beta x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin \beta x\right|\right.$$

أمثلة عامة

مثـــــال :

أوجد حل المسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ; y(0) = 4\ ,\ y'(0) = 8\ ,\ y''(0) = -4$$

الحـــــل :

نضع المعادلة على الصورة $(D^3 + 2D^2 - 3D)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0\ ,\ 1\ ,\ -3 \qquad \therefore \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

ويكون الحل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-3x} \qquad (1)$$

ولايجاد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد

$$y' = c_2 e^x - 3c_3 e^{-3x} \qquad (2)$$

$$y'' = c_1 e^x + 9c_2 e^{-3x} \qquad (3)$$

بالتعويض من الشروط الابتدائية فى المعادلات $(1), (2), (3)$

$y(0) = 4$ $\quad (1) \quad \Leftarrow \quad \therefore\ 4 = c_1 + c_2 + c_3 + \ ....(4)$

$y`(0) = 8$ $\quad (2) \quad \Leftarrow \quad 8 = c_2 - 3c_3\ ....(5)$

$y``(0) = -4 = -4$ $\quad (3) \quad \Leftarrow \quad c_2 + 9\,c_3\ ....(6)$

بحل المعادلات $(4), (5), (6)$ ، $\quad c_1 = 0,\quad c_2 = 5,\quad c_3 = -1$

و يكون الحل على الصورة $\quad y = 5e^x - e^{-3x}$

<u>مثـــــال</u> :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' + 2y'' + y'' - 2y = 0$$

الحـــل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)\, y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = 1\,,\ -1,\ -2$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} + c_3^{-2x}$$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D-2)^3(D+3)^2(D-4)y = 0$$

الحـــل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$(\lambda - 2)^3(\lambda + 3)^2(\lambda - 4) = 0$$

$$\therefore\ \lambda = 2,\ 2,\ 2,\ -3,\ -3,\ 4$$

ويكون الحل العام

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^{2x} + (c_4 + c_5 x)e^{-3x} + c_6 e^{2x}$$

مثـــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)y = 0$$

الحـــل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda^2(\lambda - 1)^2 \qquad \Rightarrow \lambda = 0,\ 0,\ 1,\ 1$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^x .$$

مـــثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

الذى يحقق الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 2, \qquad y''(0) = -6$$

الحـــل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 - 6D^2 + 9D)y = 0$$

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

$$\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-3)^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=0,\ 3,\ 3$$

ويكون الحل العام

$$y=c_1+(c_2+c_3x)e^{3x} \qquad (1)$$

ولإيجاد الحل الخاص ، نوجد

$$y'=3(c_2+c_3x)\,e^{3x} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} y''&=9(c_2+c_3x)\,e^{3x}+3c_3\,e^{3x}+3c_3\,e^{3x} \\ &=3\left[3(c_2+c_3x)e^{3x}+2c_3\,e^{3x}\right] \end{aligned} \qquad (3)$$

بالتعويض فى (3), (2), (1) من الشروط الابتدائية .

$$y(0)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=c_1+c_2 \qquad (4)$$

$$y'(0)=2 \quad \Rightarrow \quad 2=3c_2+c_3 \qquad (5)$$

$$y''(0)=-6 \quad \Rightarrow \quad -6=3[3c_2+2c_3]$$

$$\Rightarrow \qquad -2=3c_2+2c_3 \qquad (6)$$

بحل (6), (5), (4) نجد أن

$$c_1=-2 \quad ,c_2=2 \quad ,c_3=-4$$

ويكون الحل الخاص الذى يحقق الشروط

$$y=2(1-2x)e^{3x}-2$$

مثـــــال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)\, y = 0$$

الحـــل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

حيث ان المعادلة جبرية من الدرجة الثالثة ومن الصعب تحليل الطرف الايسر الى عوامل اقل من الدرجة الثالثة ، لذا نستخدم التخمين لحساب الجذور.

من نظرية المعادلات ، للمعادلة جذر حقيقى واحد على الاقل عبارة عن احد عوامل العدد 13 (الحد المطلق) .

نفرض $\lambda = 1$ $\quad \therefore L.H.S. = 1 - 3 + 9 + 13 \neq 0$

نفرض $\lambda = -1$ $\quad L.H.S. = -1 - 3 - 9 + 13 = 0 = R.H.S$

∴ $\lambda = -1$ أحد الجذور $\Leftarrow$ $\lambda + 1 = 0$ احد العوامل باستخدام القسمة على العامل $(\lambda + 1)$ نحصل على $(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

∴ تصبح المعادلة المميزة $\quad (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

ويكون الحل العام $\quad y = c_1 e^{-x} + e^{2x}[c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x]$

٤- حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة :

نعلم أن المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة تكون على الصورة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \dots, \dots a_o \neq 0 \qquad (1)$$

حيث $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n$ ثوابت ، $f(x)$ دالة متصلة فى نطاق تعريفها.

وباستخدام المؤثر D ، فإن الصورة الرمزية للمعادلة (1)

$$\Phi(D)\, y = f(x) \qquad (2)$$

حيث $\Phi(D)$دالة كثيرة حدود من درجة n فى D ،

$$\Phi(D) = a_0 D^n + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (2) نتبع الخطوات الآتية :

١) نوجد حل المعادلة المتجانسة المناظرة

$$\Phi(D) = y = 0$$

وذلك كما سبق دراسته ، ونرمز للحل الناتج بالرمز y_h ، أى أن y_h نحقق المعادلة المتجانسة فقط.

٢) نوجد حلاً خاصاً نرمز له بالرمز y_p ويحقق المعادلة (2) ، وسوف نعرض لطريقة ايجاد y_p

٣) نوجد الحل العام y_G حيث $y_G = y_h = y_p$ وبالطبع فإن y_G نحقق المعادلة (2).

ولإثبات أن y_G يحقق المعادلة $\Phi(D)\, y = 0$

$\therefore \quad \Phi(D)\, y_h = 0$

y_p يحقق المعادلة $\quad \Phi(D)\, y = f(x)$

$\therefore \quad \Phi(D)\, y = f(x$

و لإثبات أن y_G يحقق المعادلة $\quad \Phi(D)\, y = f(x)$

$$L.H.S = \Phi(D)\, y_G = \Phi(D)\,[y_h + y_p] = \Phi(D)\, y_h + \Phi(D)\, y_p = 0 + f(x) = f(x)$$

$$= R.H.S$$

طرق ايجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

المؤثر العكسي:

حيث ان y_P حل يحقق المعادلة $\Phi(D)\, y = f(x)$

$\therefore \Phi(D)\, y_P = f(x)$

باستخدام التأثير العكسى على الطرفين

$$\frac{1}{\phi(D)}\phi(D) y_p = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

وسوف ندرس استخدام التأثير العكسي $\frac{1}{\phi(D)}$ على الدالة $f(x)$ فى صور مختلفة .

١) اذا كان $f(x) = e^{\alpha x}$.

نعلم ان

$$\phi(D) e^{\alpha x} = \phi(\alpha) e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{\phi(D)} \phi(\alpha) e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(D)} \phi(D) e^{\alpha x}$$

$$\therefore \phi(\alpha) \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

بالقسمة على $\phi(\alpha) \neq 0$

أى أن $\quad \phi(\alpha) \neq 0 \quad , \quad \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} \quad , \quad \phi(\alpha) \neq 0$

٢) اذا كان $f(x)=e^{\alpha x}\, v(x)$

نعلم أن

$$D[e^{\alpha x} v(x)] = e^{\alpha x} D\, v(x)+\alpha\, e^{\alpha x} v(x)$$

$$= e^{\alpha x}(D+\alpha)\, v(x)$$

أيضاً

$$D^2[\, e^{\alpha x} v(x)] = D[\, e^{\alpha x}(D+\alpha)\, v\, (x)]$$

$$e^{\alpha x}[D^2\, v\, (x) + \alpha\, D\, v(x)]+\alpha\, e^{\alpha x}(D+\alpha)\, v(x)=$$

$$= e^{\alpha x}\, [D+\alpha\,]^2\, v(x)$$

وهكذا نجد أن

$$D)[e^{\alpha x} v(x)] = e^{\alpha x}\, \phi\, (D+ x\,)\, v(x) \quad \phi\, ($$

ومن ذلك ، يمكن اثبات ان

$$\frac{1}{\phi\, (D)}\; e^{\alpha x}\, v(x) = \quad e^{\alpha x}\, \frac{1}{\phi(D+\alpha)}\, v(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\phi(D)$

$$L.H.S. = \phi\, (D)\frac{1}{\phi(D)}\; e^{\alpha x}\, v(x) = e^{\alpha x}\, v(x)$$

$$R.H.S. = \phi(D)[\, e^{\alpha x}\, \frac{1}{\phi\, (D+x)}\; v\, (x)$$

$$= e^{\alpha x}\; \phi\, (D+\alpha)\frac{1}{\phi(D+\alpha\,)}\; v(x)$$

$$= e^{\alpha x}\, v(x)$$

٣) $\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)\, dx$

الإثبات $\quad$ let $\frac{1}{D} f(x) = z \Rightarrow f(x) = Dz = \frac{dz}{dx}.$

$\therefore z = \int f(x)\, dx = \frac{1}{D} f(x).$

$\frac{1}{D}$ التاثير العكسى للمؤثر D ، اى $\frac{1}{D}$ يمثل التكامل بالنسبة الى x ، بينما $\frac{1}{D^k}$ يمثل التكامل بالنسبة إلى x عدد k من المرات .

٤) اذا كان $f(x)$ دالة كثيرة حدود من درجة n ، وكان $\phi(D)$ تاخذ احدى صور

$(1+D), (1-D), (1+D)^2, (1-D)^2, \dots\dots\dots$

$$\therefore \frac{1}{1+D} f(x) = [1 - D + D^2 + \dots\dots + (-1)^n D^n]\, f(x)$$

$$\frac{1}{1-D} f(x) = [1 + D + D^2 + \dots\dots\dots + D^n]\, f(x)$$

$$\frac{1}{(1-D)^2} f(x) = [1 + 2D + 3D^2 + \dots + (n+1) D^n]\, f(x)$$

أو نتبع القسمة المطولة لإيجاد $1/\phi(D)$

٥- إذا كان $f(x) = c$ ، c مقدار ثابت .

$$\frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{\Phi(D)} c e^{ox} = c \frac{1}{\Phi(0)} e^{ox} = \frac{c}{\Phi(0)}; \qquad \Phi(0) \neq 0$$

فإذا كان $\quad$ 1) $\Phi(D) = D^3 - 3D^2 + 2D + 5$

$\therefore \Phi(0) = 5$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{c}{\Phi(0)} = \frac{c}{5}$$

2) $\Phi(d) = D^3 - 2D^2 + 6D \quad \rightarrow \quad \Phi(0) = 0.$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 6D} c = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D^2 - 2D = 6} c = \frac{1}{D} \frac{c}{6} = \frac{c}{6} x$$

-٦ $$f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

فإن

$$\frac{1}{\Phi(D^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \frac{1}{\Phi(-\alpha^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

نعلم أن $D \sin(\alpha x + \beta) = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$

$D^2 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^2 \sin(\alpha x + \beta)$

$D^3 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^3 \cos(\alpha^4 \sin(\alpha x + \beta)$

$D^4 \sin(\alpha x + \beta) = \alpha^4 \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^2 \sin(\alpha x + \beta)$

ومن ذلك يمكن استنتاج

$(D^2)^k \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \sin(\alpha x + \beta)$

وبالمثل نثبت أن

$(D^2)^k \cos(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \cos(\alpha x + \beta)$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore \Phi(D^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \Phi(-\alpha^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

بأخذ $f(x) = \sin(\alpha x + \beta)$

$\therefore \Phi(D^2) \sin(\alpha x + \beta) = \Phi(-\alpha^2) \sin(\alpha x + \beta)$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر العكسى $\dfrac{1}{\Phi(D^2)}$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\Phi(-\alpha^2)\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

وحيث $\Phi(-\alpha^2)$ مقدار ثابت

$$\therefore \Phi(-\alpha^2)\frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

بالقسمة على $\Phi(-\alpha^2)\neq 0$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\frac{1}{\Phi(-\alpha^2)}\sin(\alpha x+\beta)=\sin(\alpha x+\beta)$$

٧- من الحالة (1) إذا كان $\Phi(x)=0$

نضع $v(x)$ $e^{\alpha x}=e^{\alpha x}\,.\,1=e^{\alpha x}$

من (2) $\therefore \dfrac{1}{\Phi(D)}e^{\alpha x}=\dfrac{1}{\Phi(D)}(e^{\alpha x}.1)=e^{\alpha x}\dfrac{1}{\Phi(D)}\{1\}$

٨- من الحالة (٦) إذا كان $\Phi(-\alpha^2)=0$

فى هذه الحالة نضع $\sin(\alpha x+\beta)=I\,e^{i(\alpha x+\beta)}$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)}\sin(\alpha\alpha+\beta)=I\frac{1}{\Phi(D)^2}e^{i(\alpha\alpha+\beta)}\,1)=I\,e^{i(\alpha\alpha+\beta)}\frac{1}{\Phi(D+i\alpha)^2)}$$

٤- أمثلة متنوعة :

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$(D^2 2D = 3)\, y = 42\, e^{4x}$

الحـــل :

أولا : نوجد حل $(D^2 + 2D - 3)\, y = 0$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة

∴ المعادلة المميزة $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$\therefore (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -3$

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$

ثانيا : نوجد حلاً خاصاً y_p ،

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 3} 42e^{4x} = 42\frac{1}{(D-1)(D+3)} e^{4x} = 42\frac{1}{(3)(7)} e^{4x} = 2e^{4x}$$

ثالثا : الحل العام $y_g = y_4 = y_p$

حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان.

مثـــال :

أوجدى حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$(D + 4D + 3)y = 8\, xe^x - 6\,, \qquad y(0) = \frac{-11}{4}, \qquad y'(0) = \frac{1}{4}$$

الحـــل :

أولا : نوجد حل المعادلة المتجانسة

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة وتكون المعادلة المميزة هى :

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\therefore (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -1 , -3$$

$$\therefore y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانيا : نوجد حلاً خاصاً y_p

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 3}[8xe^x - 6] = \frac{1}{(D+1)(D+3)}[8xe^x - 6]$$

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 8x e^x = 8 e^x \frac{1}{(D+2)(D+4)} x$$

$$= \frac{8}{(2)(4)} e^x \frac{1}{(1+\frac{D}{2})(1+\frac{D}{4})} x = e^x (1 - \frac{D}{2})(1 - \frac{D}{4}) x$$

$$= e^x (1 - \frac{D}{2})(x - \frac{1}{4}) = e^x [x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4} e^x (4x - 3)$$

وكذلك :

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 6 = \frac{6}{3} = 2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{4} e^x (4x - 3) + 2$$

ثالثا : نوجد الحل العام

$$y_G = y_h + y_p$$

$$\therefore y = y_G = y c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x} (4x-3) + 2 \qquad (1)$$

ولايجاد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد :

$$y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x} [4 + 4x - 3]$$

$$\therefore y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x} (4x+1) \qquad (2)$$

من (1) ، (2) والشروط الابتدائية

$$y(0) = \frac{-11}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{11}{4} c_1 + c_2 - \frac{3}{4} - 2 \qquad (3)$$

$$y'(0) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4} = -c1 - 3c_2 + \frac{1}{4} \qquad (4)$$

بجمع (3) ، (4)

$$\therefore \frac{-10}{4} = -2c_2 - \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 2c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

بالتعويض فى (3)

$$c_1 = -\frac{11}{4} + \frac{11}{4} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

∴ الحل المطلوب $\quad y = \frac{1}{4} e^{x} (4x-3) - 2$

<u>مثــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - D^2) y = 2 \cos x$$

الحـــــل :

أولا : نوجد حل $(D^3 - D^2)\, y = 0$

نجد أن

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{+x}$$

ثانيا : نوجد y_p ، حيث

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2} 2\cos x = 2\frac{1}{-D+1}\cos x$$

بالضرب فى المرافق $1 + D$

$$\therefore y_p = 2\frac{1+D}{1-D^2}\cos x = 2\frac{1+D}{1+1}\cos x = (1+D)\cos x = \cos x - \sin x$$

ثالثا : الحل العام $y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} + \cos x - \sin x$

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - D + 5)y = \sin 2x$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - D + 5)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - \lambda + 5 = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x\right)$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$y_p = \frac{1}{D^2 - D + 5}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{-(2)^2 - D + 5}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{1 - D}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1 + D}{(1 + D)(1 - D)}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1 + D}{(1 - D^2)}\{\sin 2x\} = \frac{1 + D}{5}\{\sin 2x\}$$

$$= \frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

أى أن

$$y_p = \frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x\right) + \frac{1}{5}(\sin 2x + \cos 2x)$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

وفي المثال التالي سنناقش الحل عندما يكون $\phi(-\alpha^2) = 0$.

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(D^2+4)y = \sin 2x$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2+4)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = A\cos 2x + B\sin 2x$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\{\sin 2x\}$$

واضح أن $\phi(-m^2) = \phi(-4) = 0$ في هذه الحالة فإننا نستخدم الطريقة التالية :

من نظرية دى موافر نجد أن : $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

أى أن

$$\text{الجزء الحقيقي} = \cos x = \text{Re}.(e^{ix})$$

$$\text{الجزء التخيلي} = \sin x = \text{Im}.(e^{ix})$$

وعلى هذا فإن

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\text{Im}.\{e^{2ix}\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{(D+2i)^2+4}\{1\}$$

$$y_p = \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{D^2+4iD-4+4}\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{D^2+4iD}\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{4iD}(1+\frac{D}{4i})^{-1}\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.\frac{1}{4iD}(1-\frac{D}{4i}+\ldots)\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.(\frac{1}{4iD}+\frac{1}{16}+\ldots)\{1\}$$

$$= \text{Im}.e^{2ix}.(\frac{x}{4i}+\frac{1}{16})$$

$$= \text{Im}.(\cos 2x + i\sin 2x).(-\frac{x}{4}i+\frac{1}{16})$$

ومنها

$$y_p = \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x.$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

من هذا المثال يمكن اثبات أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2+4)y=\cos 2x$$

هو

$$y=A\cos 2x+B\sin 2x+\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{x}{4}\sin 2x.$$

حيث A,B ثابتان اختياريان .

٩- إذا كانت $F(x)$ على الصورة $F(x)=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}$:

فى هذه الحالة فإننا نستخدم الحالة (٦) حيث :

$$\frac{1}{\phi(D^2)}=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}=\frac{1}{\phi(m^2)}=\begin{cases}\cosh mx\\ \sinh mx\end{cases}$$

بشرط أن $\phi(m^2)\neq 0$.

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4-8D^2-9)y=50\ \sinh 2x$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4-8D^2-9)y=0$$

بافتراض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^4-8\lambda^2-9=0$$

بالتحليل نجد أن

$$(\lambda^2-9)(\lambda^2+1)=0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda^2+1)=0$$

ومنها الجذور هى $\lambda=3,\ \ \lambda=-3\ \ ,\ \lambda=\pm i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p=\frac{1}{D^4-8D^2-9}\{50\sinh 2x\}$$

$$=\frac{50\sinh 2x}{16-32-9}=\frac{50\sinh 2x}{-25}$$

ومنها

$$y_p=-2\sinh 2x.$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3\cos x+c_4\sin x-2\sinh 2x.$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4-1)y=10\cos x.\cosh x$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4-1)y=0$$

بافتراض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي .

$$\lambda^4-1=0$$

بالتحليل نجد أن $(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0$

ومنها الجذور هى $\lambda=1,\quad \lambda=-1\ ,\ \lambda=\pm i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p=\frac{1}{D^4-1}\{10\cos x.\cosh x\}$$

$$=\text{Re}.\frac{10}{(D^2-1)(D^2+1)}\{e^{ix}.\frac{e^x+e^{-x}}{2}\}$$

$$=5.\text{Re}.\frac{1}{(D^2-1)(D^2+1)}\{e^{(1+i)x}+e^{(i-1)x}\}$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{(1+i)x}}{((1+i)^2-1)((1+i)^2+1)}+\frac{e^{(i-1)x}}{((i-1)^2-1)((i-1)^2+1)}]$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{(1+i)x}}{(2i-1)(2i+1)}+\frac{e^{(i-1)x}}{(-2i-1)(-2i+1)}]$$

$$= 5.\text{Re}.[\frac{e^{x}e^{ix}}{-5}+\frac{e^{-x}e^{ix}}{-5}]$$

$$= -\text{Re}.(e^x+e^{-x})e^{ix}$$

$$= -\text{Re}.2\cosh x(\cos x+i\sin x)$$

$$= -2\cosh x.\cos x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x-2\cosh x.\cos x$$

حيث c_1,c_2,c_3,c_4 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-1)^2(D+1)y=-2e^x$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-1)^2(D+1)y=0$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ مكرر مرتين

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{x}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)}\{-2e^{x}\}$$

$$= \frac{-2}{(D-1)^2(1+1)}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{-2e^{x}}{2(D+1-1)^2}\{1\}$$

$$= -e^{x}\frac{1}{D^2}\{1\} = -\frac{1}{2}x^2 e^{x}$$

ومنها

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 e^{x}$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{x} - \frac{1}{2}x^2 e^{x}.$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-2)y = 3e^{x}(x+1)$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-2)y=0$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda-2=0$$

ومنها $\lambda=2$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{2x}$$

حيث c_1 ثابت اختيارى .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p=\frac{1}{D-2}\{3e^x(x+1)\}$$

$$=3e^x\frac{1}{D+1-2}\{x+1\}$$

$$=-3e^x\frac{1}{1-D}\{x+1\}$$

$$=-3e^x(1-D)^{-1}\{x+1\}$$

$$=-3e^x(1+D+\ldots)\{x+1\}$$

$$=-3e^x(x+1+1)$$

ومنها

$$y_p=-3(x+2)e^x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1e^{2x}-3(x+2)e^x.$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$D^2(D^2+4)y = 96x^2$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$D^2(D^2+4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2(\lambda^2+4) = 0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda = 0,0 \quad , \quad \lambda = \pm 2i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D^2(D^2+4)}\{96x^2\}$$

$$= \frac{96}{4}\frac{1}{D^2}(1+\frac{D^2}{4})^{-1}\{x^2\}$$

$$= 24\frac{1}{D^2}(1-\frac{D^2}{4}+\frac{D^4}{16}-\ldots)\{x^2\}$$

$$= 24(\frac{1}{D^2}-\frac{1}{4}+\frac{D^2}{16}-\ldots)\{x^2\}$$

$$= 24\,(\frac{x^4}{12}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8})$$

ومنها

$$y_p = 2x^4 - 6x^2 + 3$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + 2x^4 - 6x^2 + 3$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 50(e^x + \cos 3x)$$

<u>الحـــل :</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

بالتحليل نجد أن $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$

وتكون الجذور هي $\lambda = 1 \quad , \quad \lambda = \pm 2i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$y_p = \frac{50}{D^3 - D^2 + 4D - 4}\{e^x + \cos 3x\}$$

$$= \frac{50\, e^x}{(D+1)^3 - (D+1)^2 + 4(D+1) - 4}\{1\} + \frac{50}{D^3 + 9 + 4D - 4}\{\cos 3x\}$$

$$= \frac{50\, e^x}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - D^2 - 2D - 1 + 4D + 4 - 4}\{1\}$$

$$+ 50\,\mathrm{Re}.\frac{1}{D^3 + 4D + 5}\{e^{3ix}\}$$

$$= \frac{50e^x}{D^3 + 2D^2 + 5D}\{1\} + 50\,\mathrm{Re}.\frac{1}{(3i)^3 + 4(3i) + 5}e^{3ix}$$

$$= \frac{50e^x}{5D}\left(1 + \frac{D^2 + 2D}{5}\right)^{-1}\{1\} + 50\,\mathrm{Re}.\frac{1}{-27i + 12i + 5}e^{3ix}$$

$$= 10\,e^x\left(\frac{1}{D} - \frac{2}{5} + \ldots\right)\{1\} + 50\,\mathrm{Re}.\frac{1}{5 - 15i}e^{3ix}$$

$$= 10\,e^x\left(x - \frac{2}{5}\right) + 10\,\mathrm{Re}.\frac{1}{1-3i}.\frac{1+3i}{1+3i}\;e^{3ix}$$

$$= 10\,e^x\left(x - \frac{2}{5}\right) + \frac{10}{10}\mathrm{Re}.(1+3i)(\cos 3x + i\sin 3x)$$

ومنها

$$y_p = 10\;e^x\left(x - \frac{2}{5}\right) + \cos 3x - 3\sin 3x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^x + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + 10e^x\left(x - \frac{2}{5}\right) + \cos 3x - 3\sin 3x$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 5D + 6)y = 100\sin 4x.$$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda = 3$, $\lambda = 2$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2 - 5D + 6}\{100\sin 4x\} \\
&= \frac{100}{-16 - 5D + 6}\{\sin 4x\} \\
&= -20\ \mathrm{Im}.\frac{1}{D+2}\{e^{4ix}\} \\
&= -20\ \mathrm{Im}.\frac{e^{4ix}}{D + 4i + 2}\{1\}
\end{aligned}$$

$$= -20\ \mathrm{Im}.\frac{e^{4ix}}{4i+2}\left(1+\frac{D}{4i+2}\right)^{-1}\{1\}$$

$$= -20\ \mathrm{Im}.\frac{e^{4ix}}{4i+2}(1+\ldots\ldots)\{1\}$$

$$= -20\,\mathrm{Im}.\frac{e^{4ix}}{2+4i}.\frac{2-4i}{2-4i}.1$$

$$= -20\,\mathrm{Im}.\frac{(\cos 4x + i\sin 4x)(2-4i)}{20}$$

ومنها

$$y_p = 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

يمكن إيجاد الحل الخاص بطريقة أخرى

$$y_p = -20\frac{1}{D+2}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{1}{D+2}\cdot\frac{D-2}{D-2}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{D-2}{D^2-4}\{\sin 4x\}$$

$$= -20\frac{D-2}{-16-4}\{\sin 4x\}$$

$$= (D-2)\{\sin 4x\}$$

$$y_p = 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

<u>مثـــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D+1)y = x\sin x.$$

<u>الحـــــل :</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$(D+1)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda + 1 = 0$$

ومنها $\lambda = -1$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D+1}\{x\sin x\} \\ &= \operatorname{Im}.\frac{1}{D+1}\{x e^{ix}\} \\ &= \operatorname{Im}.\frac{e^{ix}}{D+i+1}\{x\} \end{aligned}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{i+1}(1+\frac{D}{i+1})^{-1}\{x\}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}(1-\frac{D}{1+i}+\ldots\ldots)\{x\}$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}(1-i)}{2}(x-\frac{1}{1+i})$$

$$= \text{Im}.\frac{e^{ix}}{2}.(x(1-i)-\frac{1-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i})$$

$$= \text{Im}.\frac{(\cos x + i\sin x)}{2}(x(1-i)+i)$$

ومنها

$$y_p = \frac{x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\cos x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + \frac{x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\cos x$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

<u>مثـــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + m^2)y = a\cos mx + b\sin mx.$$

حيث a,b ثوابت .

<u>الحـــل :</u>

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 + m^2)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$.بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + m^2 = 0$$

ومنها تكون الجذور هى $\lambda = \pm mi$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx.$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D^2 - m^2}\{a \cos mx + b \sin mx\}$$

$$= \frac{a}{D^2 + m^2}\{\cos mx\} + \frac{b}{D^2 + m^2}\{\sin mx\}$$

$$= a \operatorname{Re}.\frac{1}{D^2 + m^2}\{e^{imx}\} + b \operatorname{Im}.\frac{1}{D^2 + m^2}\{e^{imx}\}$$

نعتبر الآتى

$$\frac{1}{D^2 + m^2}\{e^{imx}\} = e^{imx} \cdot \frac{1}{(D + im)^2 + m^2}\{1\}$$

$$= e^{imx} \cdot \frac{1}{D^2 + 2imD}\{1\}$$

$$= \frac{e^{imx}}{2imD}(1 + \frac{D}{2im})^{-1}\{1\}$$

$$= \frac{e^{imx}}{2im}(\frac{1}{D} - \frac{1}{2im} + \ldots\ldots)\{1\}$$

$$= -i\frac{e^{imx}}{2m}(x + \frac{i}{2m})$$

$$= \frac{-1}{2m}(\cos mx + i \sin mx)(ix - \frac{1}{2m})$$

من هذا نستنتج أن

$$\mathrm{Re}.\left(\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}\right)=\frac{1}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m}+x\sin mx\right),$$

$$\mathrm{Im}.\left(\frac{1}{D^2+m^2}\{e^{imx}\}\right)=\frac{-1}{2m}\left(x\cos mx-\frac{\sin mx}{2m}\right).$$

من هذا يكون

$$y_p=\frac{a}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m}+x\sin mx\right)-\frac{b}{2m}\left(x\cos mx-\frac{\sin mx}{2m}\right).$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1\cos mx+c_2\sin mx+\frac{a}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m}+x\sin mx\right)$$
$$-\frac{b}{2m}\left(x\cos mx-\frac{\sin mx}{2m}\right).$$

حيث c_1,c_2 ثوابت اختيارية .

تمارين

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1. $y'' - 14y' - 48y = 0$
2. $y'' - 12y' + 27y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$
4. $y'' + y' - 2y = 0$
5. $y'' + 2y' + 5y = 0$
6. $y'' + 12y' + 36y = 0$
7. $y'' + 3y' + 4y = 0$
8. $y'' - 2y' + 4y = 0$
9. $y'' + 2y' = 0$
10. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
11. $y'' + 4y' + 13y = 0$
12. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
13. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$
14. $4y^{(5)} - 3y''' - y'' = 0$
15. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$
16. $4y^{(4)} - 23y'' - y' = 0$
17. $y'' - 10y' + 16y = 6$
18. $y'' - 5y' + 6y = 7$
19. $y'' + 4y' + 5y = 10$
20. $y'' + 4y' + 5y = x + 2$
21. $y'' - 5y' + 6y = 3x$
22. $y'' - y' + y = x^3$
23. $y'' + 4y' + 3y = x$
24. $y'' - y = x^2 + 2$
25. $3y'' + y' - 14y = 2e^x$
26. $y'' - 5y' + 6y = 7e^{4x}$
27. $y'' - y = e^x$
28. $y'' + y' + y = e^{3x} + 5$
29. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$
30. $(y'' - 2y)^2 = e^x + xe^{2x}$
31. $(y'' - 2y)^2 = x^2e^{2x}$
32. $y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^2}e^{3x}$

33. $y' - y = (x+3)e^{2x}$

34. $y'' + 9y = (x^2+1)e^{3x}$

35. $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^{x}$

36. $y'' - 6y' + 10y = x^3e^{3x}$

37. $y'' - 5y' + 6y = 9\sin 2x$

38. $y'' - 5y' + 6y = 9\cos 2x$

39. $y'' - 4y = \sin 6x$

40. $y'' + 2y' + y = 3\cos 4x$

41. $y'' - 2y' + y = xe^{x}\sin x$

42. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$

43. $y'' + 4y = \cos 2x$

44. $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$

45. $y'' - 2y' - y = e^{x}\cos x$

46. $y^{(4)} - y = \sin 2x$

47. $y'' - 4y = x^2e^{3x}$

48. $y'' + 3y' + 2y = x\sin 2x$

49. $y'' + 9y = 4\sin 3x$

50. $y'' - y = x^2\sin 3x$

51. $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

52. $y'' + 4y = 4\tan 2x$

53. $y'' + y = \sec x$

54. $y'' - y' - 2y = 10\cos x$

55. $y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$

56. $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x} + xe^{2x}$

57. $y'' + y = 3\cos 2x + 2\sin 3x$

58. $y'' + 3y' - 4y = \sin 2x$

59. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = (e^{2x}+3)^2$

60. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$

61. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2$

62. $y'' + 5y = \sin x + 2\sin 2x$

63. $y'' - 9y = 3 - 9x^2 + 27x^4$

64. $y'' + 6y' + 5y = 104e^{3x}$

65. $y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$

66. $y'' - 5y' + 6y = 25\sin 4x$

67. $y'' - 10y' + 25y = x^5e^{5x}$

68. $y'' + 2y' = 24x$

69. $4y'' + 8y' + 3y = e^{-x}(x^2 + \sin\frac{x}{2})$

70. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$

71. $y'' - y' + 5y = \sinh 2x$

72. $y^{(4)} - 8y'' + 9y = 50\sinh 2x$

73. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 50(e^x + \cos 3x)$

74. $y^{(5)} - y' = 12e^x + 8e^{-2x}\sinh x$

75. $y^{(4)} - 6y'' - 8y' - 3y = 256(x+1)e^{3x}$

76. $y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$

77. $y^{(4)} - y = 10\cos x\cosh x$

78. $y'' - y' + 3y = e^{2x}$

79. $y'' - 8y' + 15y = 30$

80. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

81. $y'' - 3y' + 2y = x^2$

82. $2y'' - y' - y = xe^x$

83. $y'' - y' + 5y = \sin 2x$

84. $y'' + 9y = \sin 3x$

85. $y'' + 4y' + 3y = x$

86. $y'' + 9y = (x^2+1)e^{3x}$

87. $y'' - 10y' + 9y = (x-2)e^x$

88. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 2x + 1$

89. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$

90. $y'' - y' + 5y = \sinh 2x$

الباب الثامن

طريقة تغيير البارامترات (الوسائط - الثوابت)

Variation of Parameters

١- مقدمة

تستخدم هذه الطريقة بصفة عامـــة لإيجـــاد الحـــل الخـــاص y_p للمعادلـــة التفاضـــلية وذلك بمعلومية حل المعادلة المتجانسة y_H حيث أننا نعتبر الثوابـــت الاختياريـــة دوال فى المتغير x .

والآن سوف نشرح هذه الطريقة على معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مع ملاحظة أنـــه يمكن تطبيقها على المعادلات التفاضلية ذات الرتب الأعلى .

لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة .

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان و $f(x)$ دالة فى المتغير المستقل x.

وتكون المعادلة المتجانسة هى

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

بافتراض أن حل المعادلة المتجانسة على الصورة

$$y_h = Ay_1 + By_2$$

حيث كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) .

والآن لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية (1) فإننا نعتبر أن كل من A, B دوال في المتغير x ويكون الحل الخاص على الصورة

$$y_p = A(x)y_1 + B(x)y_2 \qquad (3)$$

بتفاضل (3) بالنسبة إلى x نحصل على

$$y_p' = Ay_1' + A'y_1 + By_2' + B'y_2$$

نختار كل من A, B بحيث أن

$$A'y_1 + B'y_2 = 0 \qquad (4)$$

ومنها يكون

$$y_p' = Ay_1' + By_2'$$

وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y_p'' = Ay_1'' + A'y_1' + By_2'' + B'y_2'$$

وبالتعويض عن كل من y_p'', y_p', y_p فى المعادلة التفاضلية (1) نحصل على

$$Ay_1'' + A'y_1' + By_2'' + B'y_2' + a_1(Ay_1' + By_2') + a_2(Ay_1 + By_2) = f(x)$$

ومنها

$$A(y_1'' + a_1 y' + a_2 y_1) A' y_1' + B(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + A' y_1' + B' y_2' = f(x)$$

وحيث أن كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) فإن

$$y_1'' + a_1 y' + a_2 y_1 = 0 \ ,$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$$

بذلك يكون

$$A' y_1' + B' y_2' = f(x) \qquad (5)$$

وبحل المعادلتين (4) و (5) فى الدالتين A, B فأننا نحصل على كل منهما وبمعرفتهما نكون قد حلنا على الحل الخاص (3) وبذلك يمكن إيجاد الحل العام

$y_G = y_h + y_p$ للمعادلة التفاضلية (1) . مع ملاحظة أن هذه الطريقة تستخدم بصفة خاصة إذا كانت الدالة $f(x)$ على إحدى الصور

$$\frac{e^x}{x}, \ \sec x, \ \cot x, \ \tan x, \ \ln x, \ \sin^{-1} x, \ \ldots\ldots$$

والآن سنقوم بتطبيق هذه الطريقة فى الأمثلة الآتية .

٢- أمثلة محلولة :

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هى

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

حيث $D = \frac{d}{dx}$.

نفترض أن حل هذه المعادلة على الصورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعـويض نجـد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

وبالتحليل نجد أن جذرى المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 3 \quad , \lambda_2 = 3$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$$

نفترض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A(x)e^{3x} + B(x)xe^{3x}$$

حيث $A(x),\ B(x)$ دالتين في x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$y'_p = 3Ae^{3x} + A'e^{3x} + B'xe^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

نختار A, B بحيث أن

$$A'e^{3x} + B'xe^{3x} = 0 \qquad (1)$$

من هذا يكون

$$y'_p = 3Ae^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = 9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$

بالتعويض عن كل من $y''_p,\ y'_p,\ y_p$ في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$
$$- 18Ae^{3x} - 6Be^{3x} - 18Bxe^{3x} + 9Ae^{3x} + 9Bxe^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

ومنها نجد أن

$$3A'e^{3x} + B'(1 + 3x)e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

أى أن

$$3A' + B'(1+3x) = \frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$A' = -\frac{1}{x} \quad , \qquad B' = \frac{1}{x^2}$$

وبالتكامل نجد أن

$$A = -\ln x \quad , \qquad B = -\frac{1}{x}$$

بذلك يكون

$$y_p = -e^{3x}\ln x - \frac{1}{x}xe^{3x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = Ae^{3x} + Bxe^{3x} - e^{3x}\ln x - \frac{1}{x}xe^{3x}$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y = \frac{2}{1+e^x}$$

الحـــــل :

المعادلة المتجانسة هي

$$y'' - y = 0$$

بافتراض أن حلها هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

وبالتحليل نجد أن جذرى المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = -1$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = Ae^x + Be^{-x}$$

بافتراض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A(x)e^x + B(x)e^{-x}$$

حيث $A(x), B(x)$ دالتين فى x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$y'_p = Ae^x + A'e^x - Be^{-x} + B'e^{-x}$$

نختار A, B بحيث أن

$$A'e^x + B'e^{-x} = 0 \qquad (1)$$

من هذا يكون

$$y'_p = Ae^x - Be^{-x}$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = Ae^x + A'e^x + Be^{-x} - B'e^{-x}$$

بالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$Ae^x + A'e^x + Be^{-x} - B'e^{-x} - Ae^x - Be^{-x} = \frac{2}{1+e^x}$$

ومنها نجد أن

$$A'e^x - B'e^{-x} = \frac{2}{1+e^x} \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$2A'e^x = \frac{2}{1+e^x}$$

ومنها وبفصل المتغيرات نجد أن

$$dA = \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

وبالتكامل نجد أن

$$\int dA = \int \frac{dx}{e^{x}(1+e^{x})} = \int \frac{dx}{e^{x}} - \int \frac{dx}{1+e^{x}}$$

$$= -e^{-x} - \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}$$

ومنها

$$A = -e^{-x} + \ln\,(1+e^{-x})$$

وبطرح (2) من (1) نجد أن

$$B'e^{-x} = -\frac{1}{1+e^{x}}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int dB = -\int \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx$$

ومنها

$$B = -\ln\,(1+e^{x})$$

بذلك يكون

$$y_p = e^{x}\left(-e^{-x} + \ln\,(1+e^{-x})\right) - e^{-x}\ln(1+e^{x})$$

$$= -1 + e^{x}\ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^{x})$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = Ae^{x} + Be^{-x} - 1 + e^{x}\ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^{x})$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + y = \tan x$

الحـــل :

المعادلة المتجانسة هى $y'' + y = 0$

نفترض أن حلها هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

وبالتحليل تكون الجذور هى $\lambda = \pm i$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_h = A\cos x + B\sin x$

نفترض أن الحل الخاص y_p على الصورة $y_p = A(x)\cos x + B(x)\sin x$

حيث $A(x), B(x)$ دوال فى x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x $y'_p = A'\cos x - A\sin x + B'\sin x + B\cos x$

نختار A, B بحيث أن

(1) $A'\cos x + B'\sin x = 0$

من هذا يكون $y'_p = -A\sin x + B\cos x$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = -A\cos x - A'\sin x - B\sin x + B'\cos x$$

بالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$-A\cos x - A'\sin x - B\sin x + B'\cos x + A\cos x + B\sin x = \tan x$$

ومنها نجد أن

$$-A'\sin x + B'\cos x = \tan x \qquad (2)$$

بضرب المعادلة (1) فى $\sin x$ و المعادلة (2) فى $\cos x$ وبجمع المعادلتين الناتجتين نجد أن

$$B'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \tan x \,.\, \cos x$$

ومنها

$$B' = \sin x \qquad (3)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$B = -\cos x$$

وبالتعويض من (3) فى (1) نجد أن

$$B'e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$A' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

ومنها

$$dA = -\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$

وبالتكامل

$$\int dA = -\int(\sec x - \cos x)\ dx$$

$$= -\int \sec x\, dx + \int \cos x\ dx$$

$$A = -\ln(\sec x + \tan x) + \sin x$$

بذلك يكون الحل الخاص

$$y_p = [-\ln(\sec x + \tan x) + \sin x]\cos x - \cos x \,.\, \sin x$$
$$= [-\ln(\sec x + \tan x)]\cos x$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A\cos x + B\sin x - [\ln(\sec x + \tan x)]\cos x$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

تمارين

(١) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية باستخدام طريقة تغيير الوسائط (البارامترات)

(1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

(2) $y'' - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}$

(3) $y'' + 4y = 2\tan x$

(4) $y'' + y = \sec x$

(5) $y'' + y = \operatorname{cosec} x$

(6) $y'' + y = \cot x$

(7) $y'' - y = e^x \big/ 1 + e^x$

(8) $y'' + y = \tan^{-1} x$

(٢) باستخدام طريقة تغيير البارامترات اثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + \omega^2 y = f(x)$$

يمكن كتابته على الصورة

$$y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega}\int \sin(\omega(x-t)) . f(t)\, dt$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

(٣) أوجد الحل العام باستخدام طريقة تغيير البارامترات إذا علم حلان أو $x2$ للمعادلـــة المتجانسة المصاحبة .

i. $x^2y'' - xy' + y = x^3\ e^x$

ii. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t/t^3$

iii. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = e^t/1+e^t$

iv. $\frac{d^3z}{d\theta^3} - 3\frac{d^2z}{d\theta^2} + 2\frac{dz}{d\theta} = e^{3\theta}/1+e^{\theta}$

الباب العاشر

تحويل لابلاس واستخدامه فى حل المعادلات التفاضلية العادية

Laplace Transform

يستخدم بتحويل لابلاس فى حل بعض المعادلات التفاضلية العادية وكذلك بعض المعادلات التفاضلية الجزئية والتكاملية .

١- **تعريف** : (تحويل لابلاس)

يسمى التكامل (1) $\bar{f}(p)=\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-px}\ dx \quad , \quad p>0$

بتحويل لابلاس ويرمز له بالرمز $L\{\ \}$ و فى هذه الحالة يمكن كتابة *(1)* على الصورة :

$$L\{f(x)\}=\bar{f}\ (p)=\int_0^\infty f(x)\ .\ e^{-px}\quad dx \quad , \quad p>0 \qquad (2)$$

٢- **خواص المؤثر** $L\{\ \}$:

نفترض ان α و β ثابتين وأن كل من $f(x)$ و $g(x)$ دالة فى المتغير x و أن $L\{\ \}$ هو مؤثر لابلاس ، فإن :

$$1-L\{\alpha\ f(x)\}=\alpha\ L\{f(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة *(1)* نجد أن :

$$L\{\alpha\ f(x)\} = \int_0^\infty \alpha\ \ f(x).\, e^{-px}\ \ dx$$

$$= \alpha \int_0^\infty f(x)\ .\ e^{-px}\ \ dx$$

$$= \alpha\ L\{f(x)\}$$

$$2 - L\{\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\} = \alpha\, L = \{f(x)\} + \beta L\{g(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة *(1)* وحيث أن كل من α و β ثابتين فإن :

$$L\{\alpha\ f(x) + \beta\, g(x)\} = \int_0^\infty \alpha\ \ f(x) + \beta\, g(x).\, e^{-px}\ \ dx$$

$$= \int_0^\infty \alpha\, f(x)\ .\ e^{-px}\ \ dx + \int_0^\infty \beta\, g(x).e^{-px}\, dx$$

$$= \alpha \int_0^\infty f(x)\ .\ e^{-px}\ \ dx + \int_0^\infty \beta\, g(x).e^{-px}\, dx$$

$$= \alpha\ L\{f(x)\} + \beta\, L\{g(x)\}$$

مما سبق نستنتج أن المؤثر $L\{\ \}$ مؤثر تكاملى خطى .

<u>تعريف</u> : (تحويل لابلاس العكسى)

اذا كان $L\{f(x)\} = f(p)$ فإن $f(x) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$

ويسمى $L^{-1}\{\ \}$ بمؤثر لابلاس العكسى للمؤثر $L\{\ \}$. وهذا المؤثر له الخواص الآتية :

$1 - L\{L^{-1}\{\bar{f}(p)\}\} = \bar{f}(p),$

$2 - L^{-1}\{L(f(p))\} = f(p),$

$3 - L^{-1}\{a\bar{f}(p)\} = \alpha\, L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$

ويمكن إيجاد تحويل لابلاس لكل دالة تحقق الشرط :

$$|f(x)| < M e^{\alpha x}$$

حيث α و M عددان حقيقيان موجبان .

تسمى الـــدوال التى تحقق الشرط السابق دوال لها درجـــة أسية α وهى الـــدوال التى على الصورة $x^k,\ \sin kx,\ \cos kx,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$

والآن سنوجد تحويلات لابلاس لبعض الدوال .

(١) اذا كان $f(x) = 1$

فإن

$$L\{1\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\, dx = \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p}$$

اى أن

$$L\{1\} = \frac{1}{p} \qquad (3)$$

(٢) اذا كان $f(x) = x^n \ ;\ n \geq 1$:

فإن

$$L\{x^n\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty x^n e^{-px}\, dx$$

وبوضع $px = u$ فإن

$$L\{x^n\} = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\, du = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}} \ ;\ n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

(٣) إذا كان $f(x) = e^{ax}$ حيث a ثابت حقيقى :

فإن

$$L\{e^{ax}\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{ax} e^{-px} \, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-a)x} \, dx$$

$$L\{e^{ax}\} = \left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{p-a}$$

وبالتالى فإن

$$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a} \; ; \; p>a \tag{5}$$

(٤) إذا كان $f(x)=\sin ax$ حيث a ثابت حقيقى :

$$L\{\sin ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty \sin ax e^{-px} \, dx$$

فإن

$$= \frac{a}{p^2+a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2+a^2} \tag{6}$$

(٥) إذا كان $f(x)=\cos ax$ حيث a ثابت حقيقى:

$$L\{\cos ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty \cos ax \, . \, e^{-px} \, dx$$

فإن

$$= \frac{p}{p^2+a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{\cos ax\}=\frac{p}{p^2+a^2} \tag{7}$$

(٦) إذا كان $f(x)=\sinh ax$ حيث a ثابت حقيقى :

فإن

$$L\{\sinh ax\}=\bar{f}(p)=\int_0^\infty \sinh ax.e^{-px}\,dx$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

أى أن :

$$L\{\sinh ax\}=\frac{a}{p^2-a^2} \tag{8}$$

ذلك لأن :

$$\int_0^\infty \sinh ax.e^{-px}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{ax}-e^{-ax}\right).e^{-px}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(p-a)x}-e^{-(p+a)x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)}-\frac{e^{-(p+a)x}}{-(p+a)}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]=\frac{1}{2}\,\frac{p+a-p+a}{p^2-a^2}$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

وبطريقة أخرى :

$$L\{\sinh ax\}=L\left\{\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[L\{e^{ax}\}-L\{e^{-ax}\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]$$

$$=\frac{a}{p^2-a^2}$$

(٧) إذا كان $f(x)=\cosh ax$ حيث a ثابت حقيقى :

فإن :

$$L\{\cosh ax\}=\frac{p}{p^2-a^2} \qquad (9)$$

وذلك لان

$$L\{\cosh ax\}=L\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[L\{e^{ax}\}\ L\{e^{-ax}\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{p+a-p+a}{p^2-a^2}$$

$$=\frac{p}{p^2-a^2}$$

ويمكن تلخيص هذه النتائج فى الجدول التالى :

S. No.	$f(x)$	$Lf(p)$
1	1	$1/p,\ p>0$
2	x^n (n is a + v θ integer)	$n!/p^{n+1},\ p>0$
3	$x^n,\ n>-1$	$\Gamma(n+1)/p^{n+1},\ p>0$
4	x^{ax}	$1/(p-a),\ p>0$
5	$\sin^{-ax}$	$a/(p^2+a^2),\ p>0$
6	$\cos ax$	$p/(p^2+a^2),\ p>0$
7	$\sinh ax$	$a/(p^2-a^2),\ p>\|a\|$
8	$\cosh ax$	$p/p^2-a^2),\ p>\|a\|$

نظرية (١) :

إذا كانت $L\{f(x) = \bar{f}(p)$ فإن $L\{e^{-ax} f(x)\} = \bar{f}(p+a)$

البرهان :

من تعريف مؤثر لابلاس نجد ان :

$$L\left\{e^{-ax} f(x)\right\} = \int_0^\infty \cdot e^{-ax} f(x) . e^{-px}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \cdot e^{-(a+P)x} f(x) .\, dx = f(p+a)$$

مثـــال :

أثبت أن $L\{x^n e^{-ax}\} = \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}} ; n = 1,2,3,......$

الحـــل:

من تعريف تحويل لابلاس نجد أن

$$L\left\{x^n e^{-ax}\right\} = \int_0^\infty x^n\ e^{-ax}\ .e^{-px}\ dx$$

$$= \int_0^\infty x^n\ e^{-(a+P)} .\, dx = \bar{f}(p+a)$$

ولدينا :

$$L\left\{x^n\right\} = \bar{f}(x) = \frac{n!}{p^{n+1}}\ ;\ n = 1,2,3,\ ....$$

وعلى ذلك فإن

$$L\left\{x^n e^{-ax}\right\} = \bar{f}(p+a) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}\ ;\quad n = 1,2,3,.......$$

نظرية (٢):

إذا كانت $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$

فإن $L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} \bar{f}(p); = 1, 2, 3 \dots$

البرهان

حيث أن $\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx$

بالإشتقاق بالنسبة إلى p ومع خواص التفاضل والتكامل ، فإننا نحصل على

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}\bar{f}(p) &= \frac{d}{dp}\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}(e^{-px}) f(x)dx \\ &= -\int_0^\infty x e^{-px} f(x)dx \\ &= -L\{xf(x)\}\end{aligned}$$

بتكرار هذا الاشتقاق مرة أخرى نجد أن

$$\frac{d^2}{dp^2}\bar{f}(p) = (-1)^2 L\{x^2 L\{x^2 f(x)\}.$$

بتكرار هذا الاشتقاق بالنسبة إلى p عدد $(n\text{-}2)$ من المرات نحصل على العلاقة :

$$\frac{d^n}{dp^n}\bar{f}(p) = (-1)^n L\{x^n f(x)\} \quad ; \quad n = 1, 2, 3$$

<u>**مثـــال :**</u>

إثبت أن $L\{x\cos ax\} = \dfrac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$

الحـــل:

لدينا $L = \{\cos ax\} = \frac{p}{p^2 + a^2}$

بتطبيق نظرية (٢) فإن :

$$L\{x\cos ax\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2 + a^2}\right)$$

$$= \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

نظرية (٣) : (تغير المقياس) ***Change of scale***

إذا كان $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$

فإن $L\{f(ax)\} = \frac{1}{a}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)$

مثـــال:

أوجد $L\{\sin 3x\}$

الحـــل:

لدينا $L\ \{\sin x\} = \frac{1}{p^2 + 1}$

فإن $L\ \{\sin 3x\} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{p}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{p^2 + 9}$

نظرية (٤):

إذا كان $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$ ، فإن $L\{\int_0^x (f(u)du\} = \frac{\bar{f}(p)}{p}$

مثـــال:

أوجد $L\{\int_0^x \sin 2u\,du\}$

الحـــل:

لدينا $L\{\sin 2x\} = \dfrac{2}{p^2+4}$ فيكون $L\{\int_0^x \sin 2u\,du\} = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$

نظرية (٥) : القسمة على x

إذا كان $L(f(x)) = \bar{f}(p)$ فإن $L\{\dfrac{f(x)}{x}\} = \int_p^\infty \bar{f}(u)\,du$

بشرط أن تكون $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ موجودة

مثـــال:

أوجد $L = \{\dfrac{\sin x}{x}\}$

الحـــل :

حيث أن $L\{\sin x\} = \dfrac{1}{p^2+1}$ و $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

فإن $L = \{\dfrac{\sin x}{x}\} = \int_p^\infty \dfrac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(\dfrac{1}{p})$

٣- تحويلات لابلاس العكسية Inverse Laplace transforms

من تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ وجدنا أن

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

وبافتراض أن L^{-1} هو المؤثر العكسي للمؤثر L فإن :

$$f(x) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$$

وعلى هذا فإنه مما سبق يمكن بسهولة استنتاج ما يلي:

١- إذا كان $L=\{1\}\frac{1}{p}$ فإن $L^{-1}\{\frac{1}{p}\}=1$

٢- إذا كان $L\{x^n\}=\frac{n!}{p^{n+1}};n=1,2,3....$ فإن $L^{-1}\{\frac{n!}{p^{n+1}}\}=x^n;n=1,2,3$

٣- إذا كان $L\{e^{ax}\}=\frac{1}{p-a}$ فإن $L^{-1}\{\frac{1}{p-a}\}=e^{ax}$

٤- إذا كان $L\{\cos ax\}=\frac{p}{p^2+a^2}$ فإن $L^{-1}\{\frac{p}{p^2+a^2}\}=\cos ax$

وهكذا بالنسبة لباقي الدوال

مثـــال:

أوجد $L^{-1}\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\}$ حيث a, b ثابتان .

الحـــل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)}=\frac{A}{p+a}+\frac{B}{p+b}$$

بالضرب فى $(p+a)\ (p+b)$ وبمساواة المعاملات نجد أن

$$A=-B=\frac{1}{a-b}$$

ومنها نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)}=\frac{1}{a-b}[\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}]$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-}\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\}=\frac{1}{a-b}[L^{-1}\{\frac{1}{p+a}-L^{-1}\frac{1}{p+b}]$$

$$=\frac{1}{a-b}(e^{-ax}-e^{-bx})$$

وبالتالى فإن

$$L^{-1}\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\}=\frac{1}{a-b}(e^{-ax}-e^{-bx})$$

<u>مثـــــال:</u>

أوجد $L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ حيث $b\ ,\ a$ ثابتان حقيقيان.

<u>الحـــــل:</u>

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}=\frac{1}{b^2-a^2}[\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}]$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\} = \frac{1}{b^2-a^2}[L^{-1}\{\frac{p}{p^2+a^2}\} - L^{-1}\{\frac{p}{p^2+b^2}\}]$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}(\cos ax - \cos bx)$$

وبالتالى

$$[L^{-1}\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\} = \frac{1}{b^2-a^2}(\cos ax - \cos bx)]$$

<u>مثـــــال:</u>

أوجد $L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\}$ حيث a ثابت.

<u>الحـــــل:</u>

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{a}{p(p+a)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\} = L^{-1}\{\frac{1}{p}\} - L^{-1}\{\frac{1}{p+a}\}$$
$$= 1 - e^{-ax}$$

وبالتالى

$$L^{-1}\{\frac{a}{p(p+a)}\} = 1 - e^{-ax}$$

٤ - تحويلات لابلاس للمشتقات *Laplace Transforms of Derivatives*

نفترض أن الدالة $y(x)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x ، فإن مؤثر لابلاس للمشتقة يكتب على الصورة $\frac{dy}{dx}$.

ويعرف كالاتى : $L\{\frac{dy}{dx}\} = \int_0^\infty e^{-px}\frac{dy}{dx}dx$ أى

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = \int_0^\infty e^{-px} dy$$

$$= [ye^{-px}]_0^\infty + p\int_0^\infty ye^{-px} dx$$

$$= -y(0) + pL\{y(x)\}$$

وبالتالى

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = p\bar{y}(p) - y(0) \qquad (1)$$

ويعرف تحويل لابلاس للمشتقة الثانية كالآتى:

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = \int_0^\infty e^{-px} \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} d(\frac{dy}{dx})$$

$$= [\frac{dy}{dx} e^{-px}]_0^\infty + p\int_0^\infty \frac{dy}{dx} e^{-px} dx$$

ومن العلاقة (١) يكون

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = -y^{(1)}(0) + p(py) - y(0))$$

من هذا نحصل على

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} = p^2\bar{y}(p) - py(0) - y^{(1)}(0) \qquad (2)$$

حيث $y\ (0)$ هى قيمة $y(x)$ محسوبة عند x

$= 0$ و $y^{(1)}$ هى قيمة $\frac{dy}{dx}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$.

والصيغة العامة هى

$$L\{\frac{d^ny}{dx^n}\} = p^n\bar{y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y^{(1)}(0) - ... - y^{(n-1)}(0) \qquad (3)$$

حيث $y^{(r)}(0)$ هى قيمة $\dfrac{d^r y}{dx^r}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$ و $r - 0,1,....n-1$.

٥ - تطبيقات تحويل لابلاس :

سوف نستخدم تحويل لابلاس ومعكوسة فى حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملية .

أ- حل المعادلات التفاضلية العادية:

كتطبيق لتحويلات لابلاس سندرس فى الأمثلة الآتية كيفية إيجاد الحل للمعادلة التفاضلية العادية وذلك باستخدام تحويلات لابلاس.

<u>**مثـــــال:**</u>

أوجد حل المعادلة التفاضلية العادية

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

حيث $y(0) = 1$

<u>**الحـــــل:**</u>

بالتأثير بموثر لابلاس على طرفى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$L\{\frac{dy}{dx}\} + 2L\{y(x)\} = L\{\cos x\}$$

لدينا

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = p\bar{y}(p) - y(0)$$

$$L\{y(x)\} = \bar{y}(p)$$

$$L\{\cos x\} = \frac{p}{p^2+1}$$

فنحصل على

$$py(p) - y(0) + 2y(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

وبالتالى فإن

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{y(0)}{(p+2)}$$

ولكن من الشروط الإبتدائية $y\,(0) = 1$ نحصل على :

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{1}{(p+2)}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{p+2}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1+2p}{p^2+1}\right)$$

ومنها

$$\begin{aligned}\bar{y}(p) &= -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{p+2}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1+2p}{p^2+1}\right) + \frac{1}{p+2}\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{p+2}\right)\end{aligned}$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى نحصل على

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} + \frac{2}{5}L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} + \frac{3}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}\\ &= \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{5}e^{-2x}\end{aligned}$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x) = \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{3}{5}e^{-2x}$$

مثـــال

حل المعادلة $y'(0) = 2$, $y(0) = 1$ و $y'' + y = x$

الحـــل:

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين

$$L\{\frac{d^2y}{dx^2}\} + L\{y(x)\} = L\{x\}$$

وبالتالى فإن

$$p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) + \bar{y} = \frac{1}{p^2}$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية

$$p^2\bar{y}(p) - p + 2 + \bar{y} = \frac{1}{p^2}$$

وعليه فإن

$$\bar{y} = L\{y\} = \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \frac{p-2}{p^2+1}$$

بالتحليل إلى كسور جزئية فنحصل على

$$\bar{y} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1}$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسى نحصل على

$$y = L^{-1}\{\frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}\}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$y = x + \cos x - 2\sin x$

مثـــــال:

حل المعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}, \qquad y(0) = -3, y'(0) = 5$$

الحـــــل:

باستخدام مؤثر لابلاس على المعادلة نحصل على

$$l\{\frac{d^{2y}}{dx^2}\} - 3L\{\frac{dy}{dx}\{+2L\{y\} = 4L\{e^{2x}\}$$

وبالتالى

$$\{p^2 y - py(0) - y'(0)\} - 3\{p\bar{y} - y(0)\} + 2\bar{y} = \frac{4}{p-2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية فنجد أن

$$\{p^2\bar{y} - 3p - 5\} - 3\{p\bar{y} + 3\} + 2y = \frac{4}{p-2}$$

وعلى ذلك

$$\bar{y} = \frac{4}{(p^2 - 3p + 2)(p-2)} + \frac{14 - 3p}{P^2 - 3p + 2}$$

$$\bar{y} = \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن :

$$\bar{y} = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسى فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y = -7\,e^x + 4\,e^{2x} + 4\,x\,e^{2x}$$

الباب السادس

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

سوف ندرس في هذا الباب بعض المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة التـــي لهما أهمية خاصة .

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

"The differential equation variant coefficient"

تسمى المعادلة التفاضلية التى على الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_o y = f(x) \quad , \qquad a_n \neq 0$$

حيث أن كل من $f(x), a_o, a_1, \ldots, a_n$ دوال فى المتغير المستقل x بمعادلة تفاضلية من الرتبة النونية غير متجانسة ذات معاملات متغيرة .بحيث أن $f(x) \neq 0$ أما إذا كـــان $f(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية تأخذ الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_o y = 0$$

تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة النونية متجانسة ذات معاملات متغيرة حيث أن كـــل من $a_o, a_1, \ldots, a_n$ دوال فى المتغير المستقل x .

١- معادلة أويلر التفاضلية : *"Euler's differential equation"*

معادلة أويلر التفاضلية من الرتبة الثانية تأخذ الصورة

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_oy = f(x) \qquad (1)$$

حيث a_2, a_1, a_o ثوابت .

لحل المعادلة *(1)* فإننا نستخدم التعويض

$$x = e^t \qquad or \qquad t = \ln x$$

وهذا التعويض يحول المعادلة *(1)* ذات المعاملات المتغيرة إلى معادلة تفاضلية مناظرة ذات معاملات ثابتة كالآتى :

نفترض أن $\theta = \dfrac{d}{dt}$, $D = \dfrac{d}{dx}$

بذلك نجد أن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}.\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}.\dfrac{dy}{dt}$

أى أن $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$

ومنها فإن $xD = \theta \qquad (3)$

وأيضاً

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}\frac{dt}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}.\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dt}.\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2}\frac{d}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right).\frac{dt}{dx}$$

بذلك يكون $$D^2 = \frac{-1}{x^2}\theta + \frac{1}{x^2}\theta^2$$

أى أن $$x^2D^2 = \theta(\theta-1) \qquad (4)$$

من العلاقات *(4)* , *(3)* يمكن بسهولة إثبات أن

$$x^3D^3 = \theta(\theta-1)(\theta-2)$$

$$\dots \ \dots \ \dots \quad \dots \quad \dots \ \dots$$

$$x^nD^n = \theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-n+1)$$

والآن بالتعويض من المعادلتين (4) و (3) فى المعادلة (1) نجد أن

$$a_2\theta(\theta-1)y + a_1\theta\ y + a_o y = f(e^t)$$

ومنها $$(a_2\theta^2 + (a_1-a_2)\theta + a_o)y = f(e^t)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة تحل كما سبق دراسته . وبالتالى يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة أويلر التفاضلية (1) كما سنوضح ذلك فى الأمثلة الآتية.

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2D^2 - 2xD + 2)y = 4x^3$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ ونفترض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta\ (\theta - 1) - 2\theta + 2)y = 4e^{3t}$$

ومنها

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 4e^{3t}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

لحل المعادلة المتجانسة

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى

$$\lambda_1 = 1 \qquad , \lambda_2 = 2$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P = \frac{1}{\theta^2 - 3\theta + 2}\{4e^{3t}\}$$

$$= \frac{1}{3^2 - 3 \times 3 + 2} \cdot 4e^{3t} = 2e^{3t}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 2e^{3t}$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + 2x^3$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3 D^3 + 2xD - 2)y = 0$$

الحــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية إلمعطاة نجد أن

$$(\theta\ (\theta - 1)(\theta - 2) + 2\theta - 2)y = 0$$

ومنها

$$(\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2)y = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة متجانسة ذات معاملات ثابتة .

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

بالتحليل $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)=0$

فتكون الجذور هى $\lambda_1=1 \quad , \lambda_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm i$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^t+e^t(c_2\cos t+c_3\sin t)$$

ولكن $x=e^t$ ومنها $t=\ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x+x(c_2\cos(\ln x)+c_3\sin(\ln x))$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y''-6y=x^2+\frac{1}{x^2}$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x=e^t$ *وبفرض أن* $\theta=\frac{d}{dt}$ *فإن*

$$xD=\theta$$

$$x^2D^2=\theta(\theta-1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$(\theta(\theta-1)-6)y=e^{2t}+e^{-2t}$$

ومنها
$$(\theta^2-\theta-6)y=e^{2t}+e^{-2t}$$

المعادلة المتجانسة هى
$$(\theta^2-\theta-6)y=0$$

نفترض أن الحل على الصورة $y=e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعـويض نجـد أن المعادلـة المساعدة هى
$$\lambda^2-\lambda-6=0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى
$$\lambda_1=3 \quad ,\lambda_2=-2$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو
$$y_h=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$\begin{aligned}
y_P&=\frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{2t}+e^{-2t}\}\\
&=\frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{2t}\}+\frac{1}{\theta^2-\theta-6}\{e^{-2t}\}\\
&=\frac{e^{2t}}{4-2-6}+\frac{e^{-2t}}{(\theta-2)^2-(\theta-2)-6}\{1\}\\
&=\frac{-1}{4}e^{2t}+e^{-2t}\frac{1}{\theta^2-5\theta}\{1\}\\
&=\frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta}{5})^{-1}\{1\}\\
&=\frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots)\{1\}\\
&=\frac{-1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(t+\frac{1}{5})
\end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y=c_1e^{3t}+c_2e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-2t}(t+\frac{1}{5})$$

ولكن $x=e^t$ ومنها $t=\ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x^3+c_2x^{-2}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}x^{-2}(\ln x+\frac{1}{5})$$

حيث c_1,c_2 ثوابت اختيارية .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3D^3+2xD-2)y=x^2\log x+x$$

الحـــــل :

بالتعويض عن $x=e^t$ فإننا نحصل على المعادلة ذات المعاملات الثابتة

$$(\theta^3-3\theta^2+4\theta-2)y=te^{2t}+e^t$$

كما في مثـــــال (٢) وجدنا أن

$$y_h=c_1e^t+e^t(c_2\cos t+c_3\sin t)$$

حيث c_1,c_2,c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$\begin{aligned} y_P&=\frac{1}{\theta^3-3\theta^2+4\theta-2}\{te^{2t}+e^t\}\\ &=\frac{1}{\theta^3-3\theta^2+4\theta-2}\{te^{2t}\}+\frac{1}{\theta^3-3\theta^2+4\theta-2}\{e^t\}\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{2t}}{(\theta+2)^3 - 3(\theta+2)^2 + 4(\theta+2) - 2}\{t\}$$

$$+ \frac{e^{t}}{(\theta+2)^3 - 3(\theta+2)^2 + 4(\theta+2) - 2}\{1\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{\theta^3 + 3\theta^2 + 4\theta + 2}\{t\} + \frac{e^{t}}{\theta^3 + \theta}\{1\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}(1 + \frac{4\theta + 3\theta^2 + \theta^3}{2})^{-1}\{t\} + e^t \frac{1}{\theta}(1+\theta^2)^{-1}\{1\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}(1 - 2\theta + \ldots)\{t\} + e^t(\frac{1}{\theta} - \ldots)\{1\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}(t-2) + te^t$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^t + e^t(c_2 \cos t + c_3 \sin t) + \frac{1}{2}(t-2)e^{2t} + te^t$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + x(c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x)) + \frac{1}{2}(\ln x - 2)x^2 + x \ln x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 4 \ln x$$

الحـــل :

نفترض أن $x = e^t$ و أن $\theta = \frac{d}{dt}$ وعليه فإن

$xD = \theta$

$x^2D^2 = \theta(\theta - 1)$

$x^3D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$(\theta(\theta - 1)(\theta - 2) - 4\theta(\theta - 1) + 8\theta - 8)y = 4t$

ومنها $(\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8)y = 4t$

المعادلة المتجانسة هى

$(\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8)y = 0$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$

بالتحليل $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$

فتكون الجذور هى $\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 4$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$y_h = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{4t}$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8}\{4t\}$$

$$= \frac{4}{-8}(1 - \frac{14\theta - 7\theta^2 + \theta^3}{8})^{-1}\{t\}$$

$$= \frac{-1}{2}(1 + \frac{14}{8}\theta + ...)\{t\}$$

$$= \frac{-1}{2}(t + \frac{14}{8})$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{4t} - \frac{1}{2}(t + \frac{14}{8})$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^4 - \frac{1}{16}(8\ln x + 14)$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

<u>مثـــــال :</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y'' - xy' - 3y = x^5$$

<u>الحــــل :</u>

باستخدام التعويض $x = e^t$ *وبفرض أن* $\theta = \frac{d}{dt}$ *فإن*

$$xD = \theta$$

$$x^2D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta-1)-\theta-3)y=e^{5t}$$

ومنها

$$(\theta^2-2\theta-3)y=e^{5t}$$

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2-2\theta-3)y=0$$

نفترض أن الحل لها هو $y=e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي $\lambda_1=3 \quad ,\lambda_2=-1$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_H=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P=\frac{1}{\theta^2-2\theta-3}\{e^{5t}\}$$

$$=\frac{1}{25-10-3}\,.\,e^{5t}=\frac{1}{12}e^{5t}$$

بذلك يكون الحل هو $y=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}+\frac{1}{12}e^{5t}$

ولكن $x=e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1x^3+c_2x^{-1}+\frac{1}{12}x^5$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 5x^2 + 6$$

الحـــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1) + 2\theta - 6)y = 5e^{2t} + 6$$

ومنها $(\theta^2 + \theta - 6)y = 5e^{2t} + 6$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2 + \theta - 6)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda_1 = 2 \quad , \lambda_2 = -3$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$y_P = \frac{1}{\theta^2 + \theta - 6}\{5e^{2t} + 6\}$$

$$= 5\ e^{2t}\ \frac{1}{(\theta+2)^2 + (\theta+2) - 6}\{1\} + \frac{1}{\theta^2 + \theta - 6}\{6\}$$

$$= 5\ e^{2t}\ \frac{1}{\theta^2 + 5\theta}\{1\} - \frac{1}{6}(1 - \frac{\theta + \theta^2}{6})^{-1}\{6\}$$

$$= 5\ e^{2t}\ \frac{1}{5\theta}(1 + \frac{\theta}{5})^{-1}\{1\} - (1 - \frac{\theta + \theta^2}{6})^{-1}\{1\}$$

$$= e^{2t}\ \frac{1}{\theta}(1 - \frac{\theta}{5} + \ldots\ldots)\{1\} - (1 - \ldots\ldots)\{1\}$$

$$= e^{2t}(t - \frac{1}{5}) - 1$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} + e^{2t}(t - \frac{1}{5}) - 1$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^{-3} + x^2(\ln x - \frac{1}{5}) - 1$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثـــال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 6xy' + 6y = \ln x$$

الحــــل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$(\theta(\theta - 1) + 6\theta + 6)y = t$$

ومنها $(\theta^2 + 5\theta + 6)y = t$

المعادلة المتجانسة هى

$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = 0$$

نفترض أن الحل على الصورة $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هى $\lambda_1 = -2 \quad , \lambda_2 = -3$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_P هو

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{\theta^2 + 5\theta + 6}\{t\} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5\theta + \theta^2}{6}\right)^{-1}\{t\} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{5\theta}{6} + \ldots\ldots\right)\{t\} \\ &= \frac{1}{6}\left(t - \frac{5}{6}\right) \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}t - \frac{5}{36}$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \frac{1}{6}\ln x - \frac{5}{36}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^2$
2. $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 4x + 6x^3$
3. $x^2y'' + 5xy' + 3y = (1 + \frac{1}{x})^2 \log x$
4. $x^2y'' + 5xy' + 4y = \frac{1}{x^2}$
5. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \log x$
6. $x^2y'' + xy' + y = \ln x$
7. $x^2y'' + 6xy' + 6y = \ln x$
8. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3\log x$
9. $x^2y'' - 2xy' + 2y = (\log x)^2 - \log x^2$
10. $2x^2y'' + 15xy' - 7y = \sqrt{x}$
11. $x^2y'' - xy' + 4y = \cos(\log x)$
12. $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + 8y = 32x^2$
13. $x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2$
14. $x^2y'' - xy' = 2$
15. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 2x^3$
16. $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2 \log x + 3x$

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الآتية :

(1) $x^2y'' - 6y = \ln x$, $\quad y(1) = \frac{1}{6}$, $\quad y'(1) = \frac{-1}{6}$

(2) $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x^3$, $\quad y(-2) = 1$, $\quad y'(-2) = 7$